Résolution du problème du voyageur de commerce par séparation et évaluation

On peut relaxer le problème en minimisant

$$\sum_{i,j} x_{i,j} d_{i,j} \qquad \text{sous les contraintes}$$

$$\forall i \ \sum_j xi, j = 1$$

$$\forall j \ \sum_i xi, j = 1$$

$$\forall i \ \forall j \ x_{i,j} \in [0,1]$$

C'est un programme linéaire qui se résout bien par la méthode hongroise avec un temps $O(n^3)$, avec une solution optimale entière. Cela donne donc une solution formée éventuellement de plusieurs cycles distincts.

Si cette solution optimale du problème relaxé n'a qu'un cycle, c'est la solution optimale du problème non relaxé. Si il y a plusieurs cycles, on peut faire une séparation en imposant ou en interdisant un des arcs du cycle le plus court.

La méthode hongroise permet de se ramener au cas où les arcs pris ont un coût nul, tous les autres arcs ayant un poids positifs ou nul. On peut alors fusionner les sommets appartenant un même cycle en un seul sommet, en gardant le minimum de longueur des arcs fusionnés, puis appliquer l'algortithme de Floyd-Warshall :

pour tout j faire pour tout i faire pour tout k faire $d_{i,k} = \min(d_{i,k}, d_{i,j} + d_{j,k})$

qui donne ainsi la longueur du plus court chemin reliant deux sommets donnés, et augmenter l'évaluation par défaut obtenue par la méthode hongroise, de l'évaluation par défaut pour ce nouveau problème de voyageur de commerce, que l'on peut calculer récursivement.